

Title	Absolute normの単調性とその応用 (非線形解析学と凸解析学の研究)
Author(s)	三谷, 健一; 斎藤, 吉助; 小室, 直人
Citation	数理解析研究所講究録 (2009), 1643: 116-123
Issue Date	2009-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/140627
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Absolute norm の単調性とその応用¹

三谷健一 (新潟工科大学工学部)

斎藤吉助 (新潟大学理学部)

小室直人 (北海道教育大学旭川校)

1 序文

\mathbb{C}^2 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, 任意の $x, y \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|(|x|, |y|)\| = \|(x, y)\|$$

のときを言い, normalized であるとは $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$ のときを言う. ℓ_p -ノルム $\|\cdot\|_p (1 \leq p \leq \infty)$ は最も基本的な例である:

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x|, |y|\}, & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

AN_2 を \mathbb{C}^2 上の absolute normalized norm 全体とする. また, Ψ_2 を以下を満たす $[0, 1]$ 上の連続凸関数全体とする:

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

[1] にあるように, AN_2 と Ψ_2 は

$$\psi(t) = \|(1-t, t)\| \tag{1}$$

の下で 1 対 1 対応であることが知られている. 実際, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(x, y)\|_\psi = \begin{cases} (|x| + |y|)\psi\left(\frac{|y|}{|x| + |y|}\right), & \text{if } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

¹2000 *Mathematics Subject Classification*. 46B20.

Keywords. absolute normalized norm, Lorentz sequence space, uniformly non-square.

と定義すると $\|\cdot\| \in AN_2$ であり, (1) を満たす. 例えば, $\|\cdot\|_p$ ノルム ($1 \leq p \leq \infty$) に対応する関数は

$$\psi_p(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + t^p)^{1/p}, & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{1-t, t\}, & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

である.

本論文では, \mathbb{C}^2 上の absolute normalized ノルムの単調性を考察する. 2002 年, 高橋-加藤-斎藤 [12] は \mathbb{C}^2 上の absolute normalized ノルム及び 2 個のバナッハ空間の ψ -直和空間の狭義凸性を調べる際に, absolute normalized ノルムの狭義の単調性を考察した. その単調性の結果を改良し, それに対応する関数 ψ の形状との関係を表すことを目的とする. 応用として, バナッハ空間上に新しい幾何学的定数 $\gamma_{X,\psi}$ を導入し, 一様 non-square 性を持つバナッハ空間を $\gamma_{X,\psi}$ を用いて評価する.

2 Absolute normalized ノルムの単調性

本章では, \mathbb{C}^2 上の absolute normalized ノルムの単調性を考える. 次の命題に見られるように, absolute normalized ノルムはノルムの単調性を持つ.

命題 1 ([1]) $\psi \in \Psi_2$ とする. (i) $|z| \leq |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば

$$\|(z, w)\|_\psi \leq \|(u, v)\|_\psi.$$

(ii) $|z| < |u|$, $|w| < |v|$ ならば

$$\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi.$$

しかし, 高橋-加藤-斎藤 [12] にあるように, $\psi \in \Psi_2$ に対して一般に次は成立しない: $|z| \leq |u|$, $|w| \leq |v|$ とする. $|z| < |u|$ または $|w| < |v|$ ならば,

$$\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi. \quad (2)$$

例えば, (2) は $\psi = \psi_p$ ($1 \leq p < \infty$) のとき成立するが, $\psi = \psi_\infty$ のときは成立しない.

高橋-加藤-斎藤 [12] は (2) を満たすための ψ の必要十分条件を与えた.

定理 2 ([12]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

- (i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > t$.
- (ii) $\psi(t)/t$ は $(0, 1]$ 上狭義単調減少.
- (iii) $|z| < |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば $\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi$.

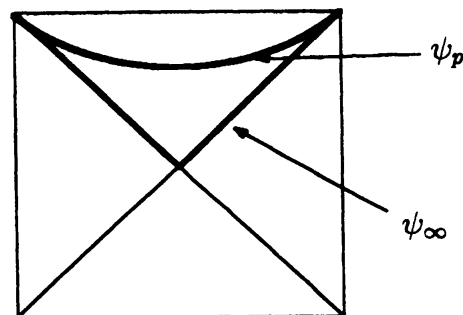
定理 3 ([12]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

- (i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > 1 - t$.
- (ii) $\psi(t)/(1 - t)$ は $[0, 1)$ 上狭義単調増加.
- (iii) $|z| \leq |u|$, $|w| < |v|$ ならば $\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi$.

定理 4 ([12]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

- (i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > \psi_\infty(t)$.
- (ii) $|z| \leq |u|$, $|w| < |v|$ または $|z| < |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば $\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi$.

例 5 ℓ_p -ノルム $\|\cdot\|_p (1 \leq p < \infty)$ の単調性を考える. 明らかに, 任意の $t \in (0, 1)$ に対して $\psi_p(t) > \psi_\infty(t)$ である.



従って, 定理 4 を適用することにより次が得られる: $|z| \leq |u|$, $|w| < |v|$ または $|z| < |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば

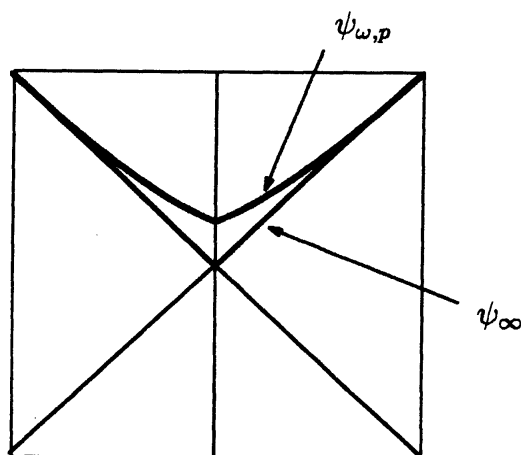
$$\|(z, w)\|_p < \|(u, v)\|_p.$$

例 6 $1 \leq q < \infty, 0 < \omega < 1$ とする. 2次元 Lorentz 数列空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ は, 次のノルムを持つ \mathbb{R}^2 である:

$$\|(x, y)\|_{\omega, q} = (x^{*q} + \omega y^{*q})^{1/q},$$

ここで $x^* = \max\{|x|, |y|\}$, $y^* = \min\{|x|, |y|\}$ である. このとき $\|\cdot\|_{\omega, q} \in AN_2$ であり, このノルムに対応する Ψ_2 の中の関数 $\psi_{\omega, q} (\in \Psi_2)$ は

$$\psi_{\omega, q}(t) = \begin{cases} ((1-t)^q + \omega t^q)^{1/q}, & \text{if } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (t^q + \omega(1-t)^q)^{1/q}, & \text{if } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$



上の図から, 任意の $t \in (0, 1)$ に対して $\psi_{\omega, p}(t) > \psi_{\infty}(t)$ である. よって定理 4 より $|z| \leq |u|$, $|w| < |v|$ または $|z| < |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば

$$\|(z, w)\|_{\omega, p} < \|(u, v)\|_{\omega, p}.$$

我々は定理 2 及び 3 の結果をさらに改良し, ノルムの狭義の単調性とそれに対応する関数 ψ の形状との関係を表す.

定理 7 $\psi \in \Psi_2$ とし, $1/2 \leq t_0 \leq 1$ とする. このとき次は同値:

- (i) 任意の $0 < t < t_0$ なる t に対して $\psi(t) > t$. また任意の $t_0 \leq t \leq 1$ なる t に対して $\psi(t) = t$.
- (ii) $\psi(t)/t$ は $(0, t_0)$ 上狭義単調減少. また任意の $t_0 \leq t \leq 1$ なる t に対して $\psi(t)/t = 1$.
- (iii) $|z| < |u|$ とする. $\frac{|w|}{|u|+|w|} < t_0$ ならば

$$\|(z, w)\|_{\psi} < \|(u, w)\|_{\psi}.$$

また $\frac{|w|}{|u|+|w|} \geq t_0$ ならば

$$\|(z, w)\|_{\psi} = \|(u, w)\|_{\psi}.$$

定理 8 $\psi \in \Psi_2$ とし, $0 \leq t_0 \leq 1/2$ とする. このとき次は同値:

- (i) 任意の $t_0 < t < 1$ なる t に対して $\psi(t) > 1 - t$. また任意の $0 \leq t \leq t_0$ なる t に対して $\psi(t) = 1 - t$.
- (ii) $\psi(t)/(1 - t)$ は $(t_0, 1)$ 上狭義単調増加. また任意の $0 \leq t \leq t_0$ なる t に対して $\psi(t)/(1 - t) = 1$.
- (iii) $|w| < |u|$ とする. $\frac{|v|}{|z|+|v|} > t_0$ ならば

$$\|(z, w)\|_\psi < \|(z, v)\|_\psi.$$

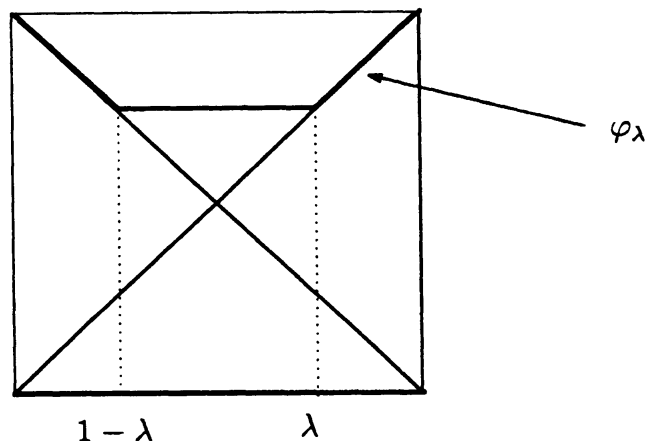
$\frac{|v|}{|z|+|v|} \leq t_0$ ならば

$$\|(z, w)\|_\psi = \|(z, v)\|_\psi.$$

例 9

$$\varphi_\lambda(t) = \max\{\lambda, 1 - t, t\} \in \Psi_2$$

を考える, ここで $1/2 < \lambda \leq 1$.



この関数に対応するノルムは

$$\|(x, y)\|_{\varphi_\lambda} = \max\{\lambda\|(x, y)\|_1, \|(x, y)\|_\infty\}.$$

このとき $0 < t < \lambda$ ならば $\varphi_\lambda(t) > t$. $\lambda \leq t \leq 1$ ならば $\varphi_\lambda(t) = t$. 従って上の定理を適用することにより次が成り立つ: $|z| < |u|$ とする. $\frac{|w|}{|u|+|w|} < \lambda$ ならば

$$\|(z, w)\|_{\varphi_\lambda} < \|(u, w)\|_\psi.$$

また $\frac{|w|}{|u|+|w|} \geq \lambda$ ならば

$$\|(z, w)\|_\psi = \|(u, w)\|_\psi.$$

3 バナッハ空間における幾何学的定数

X をバナッハ空間とする. また, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とおく. このとき

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1 : x, y \in S_X\right\}$$

を X の modulus of smoothness と言う. Yang-Wang[13] はバナッハ空間 X 上の幾何学的定数 γ_X を導入した:

$$\gamma_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2}{2} : x, y \in S_X\right\}.$$

本章では, これらの定数を一般化したバナッハ空間上の幾何学的定数 $\gamma_{X,\psi}$ を導入する.

バナッハ空間 X, Y と $\psi \in \Psi_2$ に対し, 次のノルムを持つ X, Y の直和空間をバナッハ空間 X, Y の ψ -直和といい, $X \oplus_\psi Y$ と表す:

$$\|(x, y)\|_\psi = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\psi \quad (x \in X, y \in Y).$$

このとき, バナッハ空間 X と $\psi \in \Psi_2$ に対し, $[0, 1]$ 上の関数 $\gamma_{X,\psi}$ を以下のように定義する ([8]):

$$\gamma_{X,\psi}(t) = \sup\left\{\|(x+ty, x-ty)\|_\psi : x, y \in S_X\right\}.$$

明らかに,

$$\gamma_{X,\psi_1}(t) = 2(\rho_X(t) + 1).$$

ここで ψ_1 は ℓ_1 -ノルムに対応する関数である. また

$$\gamma_{X,\psi_2}(t) = \sqrt{2\gamma_X(t)}.$$

ここで ψ_2 は ℓ_2 -ノルムに対応する関数である.

命題 10 任意のバナッハ空間 X と $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$2\psi\left(\frac{1-t}{2}\right) \leq \gamma_{X,\psi}(t) \leq 2(1+t)\psi\left(\frac{1}{2}\right).$$

定義 11 バナッハ空間 X が一様 non-square であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $\|(x-y)/2\| \geq 1-\delta$ なる $x, y \in S_X$ ならば $\|(x+y)/2\| < 1-\delta$ であるときを言う.

一様 non-square を持つバナッハ空間を考える. [2, 13] において一般のバナッハ空間の一様 non-square 性の ρ_X, γ_X による特徴づけが与えられた.

定理 12 ([2, 13]) X をバナッハ空間とする. このとき次は同値:

- (i) X が一様 non-square.
- (ii) $0 < t \leq 1$ なる任意の (ある) t に対して $\rho_X(t) < t$.
- (iii) $0 < t \leq 1$ なる任意の (ある) t に対して $\gamma_X(t) < (1+t)^2$.

この定理の拡張として以下の定理が与えられた.

定理 13 ([8]) X をバナッハ空間, $\psi \in \Psi_2$ とする. また任意の $0 < t < 1$ に対して $\psi(t) > \psi_\infty(t)$. このとき次は同値:

- (i) X が一様 non-square.
- (ii) 任意の $0 < t \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t) < 2(1+t)\psi(\frac{1}{2})$.
- (iii) ある $0 < t_0 \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t_0) < 2(1+t_0)\psi(\frac{1}{2})$.

しかし定理 7 と定理 8 を用いることにより, 以下のように改良することができる.

定理 14 X をバナッハ空間, $\psi \in \Psi_2$ とする. また $\psi \neq \psi_\infty$ とする. このとき次は同値:

- (i) X が一様 non-square.
- (ii) 任意の $0 < t \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t) < 2(1+t)\psi(\frac{1}{2})$.
- (iii) ある $0 < t_0 \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t_0) < 2(1+t_0)\psi(\frac{1}{2})$.

$\varphi_\lambda = \max\{\lambda, 1-t, t\} \in \Psi_2$ を考える, ここで $1/2 < \lambda \leq 1$. このとき $\varphi_\lambda(\frac{1}{2}) = \lambda$ であり, $\varphi_\lambda \neq \psi_\infty$ である. 従って上の定理より次が得られる.

系 15 X をバナッハ空間とする. また $1/2 < \lambda \leq 1$ とする. このとき次は同値:

- (i) X は一様 non-square.
- (ii) 任意の $0 < t \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\varphi_\lambda}(t) < 2\lambda(1+t)$.
- (iii) ある $0 < t_0 \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\varphi_\lambda}(t_0) < 2\lambda(1+t_0)$.

参考文献

- [1] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.
- [2] J. Gao, Normal structure and modulus of smoothness in Banach spaces, Non-linear Funct. Anal. Appl. 8 (2003) 233–241.

- [3] J. Gao and K. S. Lau, On two classes of Banach spaces with uniform normal structure, *Studia Math.* 99 (1991) 41–56.
- [4] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces, *Studia Math.* 144 (2001) 275–295.
- [5] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, On ψ -direct sums of Banach spaces and convexity, *J. Austral. Math. Soc.* 75 (2003) 413–422.
- [6] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, Uniform non-squareness of ψ -direct sums of Banach spaces $X \oplus_{\psi} Y$, *Math. Inequal. Appl.* 7 (2004) 429–437.
- [7] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using ψ -direct sums, *J. Math. Anal. Appl.* 327 (2007) 898–907.
- [8] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A new geometrical constant and ψ -direct sums of Banach spaces, *Proceedings of the 2nd international symposium on Banach and function spaces II*, Yokohama Publishers, (2008) 385–391.
- [9] K.-S. Saito and M. Kato, Uniform convexity of ψ -direct sums of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 277 (2003) 1–11.
- [10] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Absolute norms on \mathbb{C}^n , *J. Math. Anal. Appl.* 252 (2000) 879–905.
- [11] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, *Nihonkai Math. J.* 9 (1998) 155–169.
- [12] Y. Takahashi, M. Kato and K.-S. Saito, Strict convexity of absolute norms on \mathbb{C}^2 and direct sums of Banach spaces, *J. Inequal. Appl.* 7 (2002) 179–186.
- [13] C. Yang and F. Wang, On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant, *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006) 555–565.